MINISTÈRE DE L'ÉQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1997
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD
Banque de notes pour le concours EIVP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

1ère épreuve

Durée : 4 heures- Coefficient : 10

Notations

- $[\![i,j]\!]$ est le segment dans N de bornes i et j.
- Si $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ est la matrice transposée de M.
- à $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\Phi_A : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto AX$
- si ${}^tX = (x_1 \dots x_n)$ et ${}^tY = (y_1 \dots y_n)$, $(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$, $\|X\|_2 = \sqrt{(X|X)}$
- à $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\|\Phi_A\| = \sup_{\|X\|_2 \leqslant 1} \|AX\|_2 = \|A\|$.

On rappelle que l'on définit ainsi une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\|_2 \leqslant \|A\|.\|X\|_2$$
$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|$$

- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite définie positive si la forme quadratique $q_A : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto {}^tXAX$ est définie positive.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Les théorèmes utilisés devront être énoncés et les hypothèses explicitées.

Partie I

1. Soit $A' \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive notée par blocs :
$A' = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{pmatrix}$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}). C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}). a \in \mathbb{R}$.
Montrer que A est une matrice symétrique définie positive et que $a > 0$.
2. Montrer qu'une matrice B de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Notons $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A, $\alpha = \min\big(\mathrm{Sp}(A)\big)$ et $\beta = \max\big(\mathrm{Sp}(A)\big)$.
a) Montrer que : $\alpha = \min\limits_{\|X\|_2=1} q_A(X)$ et $\beta = \max\limits_{\|X\|_2=1} q_A(X)$.
b) Si $\alpha' = \min\big(\mathrm{Sp}(A')\big)$ et $\beta' = \max\big(\mathrm{Sp}(A')\big)$, montrer que $\alpha' \leqslant \alpha$ et $\beta \leqslant \beta'$.
4. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ où $u \in \mathbb{R}$.
a) Montrer l'égalité : $q_{A'}(X') = q_A(X) + 2u\,({}^tX\,C) + a\,u^2$.
b) Montrer que : $q_{A'}(X') \leqslant (\,\|X\|_2 \quad |u|\,) \begin{pmatrix} \beta & \|C\|_2 \\ \|C\|_2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|X\|_2 \\ |u| \end{pmatrix}$
c) En déduire que : $\beta' \leqslant \dfrac{1}{2}\Big[\beta + a + \sqrt{4\|C\|_2^2 + (\beta - a)^2}\Big]$.

Partie II

On note H_n la matrice de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $H_n = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$ pour i et j dans $[\![1, n+1]\!]$.
Pour ${}^tX = (x_0 \ldots x_n) \in \mathfrak{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ et non nul, on pose $q_n(X) = q_{H_n}(X) = {}^tX\,H_n\,X$.

1. Montrer que $q_n(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n)^2 dt$ et en déduire que H_n est définie positive.
2. a) Montrer que si P est un polynôme à coefficients complexes, on a :
$$\int_{-1}^{1} P(x)dx + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0$$
b) En déduire que : $q_n(X) < \displaystyle\int_0^{\pi} \left|x_0 + x_1 e^{i\theta} + \ldots + x_n e^{in\theta}\right|^2 d\theta$.
c) En déduire que $q_n(X) < \pi\|X\|_2^2$
3. Montrer que $\mathrm{Sp}(H_n)$ est une partie de $]0, \pi[$.
4. On note $\alpha_n = \min\big(\mathrm{Sp}(H_n)\big)$ et $\beta_n = \max(\mathrm{Sp}(H_n))$. Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ sont respectivement décroissante et croissante.
Justifier l'inégalité : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \beta_{n+1} \leqslant \beta_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$.

5. a) Soit $\Gamma = \left\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x \quad y)\, H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\right\}$. Préciser la nature de Γ et la représenter dans un repère orthonormé en prenant 2 cm pour unité.

b) Montrer que l'application $N : X \mapsto \sqrt{{}^tX\, H_1\, X}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Que représente Γ pour N sur $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

Partie III

Soit $\delta_n = \inf\limits_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \left(x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1}t^{n-1} + t^n\right)^2 dt \right)$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$\delta_n = \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n\right)^2 dt$ et qu'il est déterminé par :

$$\forall k \in [\![0.n-1]\!]. \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) t^k dt = 0$$

2. Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{X+n} + \frac{1}{X+n+1}$$

a) Quelle est la valeur de $F(k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$?

b) Exprimer δ_n à l'aide de F. Montrer que $F(X) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \dfrac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{(X+1)\ldots(X+n+1)}$ et en déduire la valeur de δ_n.

3. α_n ayant été défini à la question II.4. montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha_n \leqslant \dfrac{1}{12.(15)^{n-1}}$.

Partie IV

Pour toute matrice A inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel défini par : $C(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$.

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'unique solution de $AX = B$, $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \neq 0$. Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que : $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{\|\Delta X\|_2}{\|X\|_2} \leqslant C(A).\frac{\|\Delta B\|_2}{\|B\|_2} \qquad \text{et que} \qquad C(A) \geqslant 1.$$

2. a) Exprimer pour toute matrice A inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ le réel $C(A)$ à l'aide des éléments de $\mathrm{Sp}\left(A\,{}^tA\right)$. Que vaut $C(A)$ si A est une matrice symétrique définie positive ?

On pourra montrer et utiliser le résultat suivant : si U et V sont deux éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et si U est inversible, alors $(U\,V)$ et $(V\,U)$ ont le même spectre.

b) Montrer que si $C(A) = 1$, alors il existe $\mu > 0$ tel que la matrice μA soit orthogonale.

c) Comparer $C(A)$ et $C(Q\,A)$ si Q est une matrice orthogonale.

d) Grâce au calcul de β_1, donner une minoration de $C(H_n)$ pour $n \geqslant 1$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail